

# Das Kapitulationsproblem in der Klassenkörpertheorie

Tobias Bembom

Universität Göttingen

2 April 2012

# Themenübersicht

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie
- Das Kapitulationsproblem & Einordnung in die Literatur

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie
- Das Kapitulationsproblem & Einordnung in die Literatur
- Chevalleys Theorem & Implikationen

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie
- Das Kapitulationsproblem & Einordnung in die Literatur
- Chevalleys Theorem & Implikationen
- Wachstum von Idealklassen

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie
- Das Kapitulationsproblem & Einordnung in die Literatur
- Chevalleys Theorem & Implikationen
- Wachstum von Idealklassen
- Struktur des Kapitulationskerns &  $G$ -Wirkung

# Themenübersicht

- Grundlagen der Klassenkörpertheorie
- Das Kapitulationsproblem & Einordnung in die Literatur
- Chevalleys Theorem & Implikationen
- Wachstum von Idealklassen
- Struktur des Kapitulationskerns &  $G$ -Wirkung
- Kapitulation in imaginär quadratischen Körpern & Heuristik



# Hauptsatz der Klassenkörpertheorie

# Hauptsatz der Klassenkörpertheorie

## Theorem

*Sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper mit Idealklassengruppe  $Cl(K)$ . Dann existiert eine eindeutige Körpererweiterung  $H(K)/K$ , so dass:*

- (i)  $H(K)$  ist die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung von  $K$ ;*
- (ii)  $Cl(K) \cong Gal(H(K)/K)$ .*

# Hauptsatz der Klassenkörpertheorie

## Theorem

Sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper mit Idealklassengruppe  $Cl(K)$ . Dann existiert eine eindeutige Körpererweiterung  $H(K)/K$ , so dass:

- (i)  $H(K)$  ist die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung von  $K$ ;
- (ii)  $Cl(K) \cong Gal(H(K)/K)$ .

- Man nennt  $H(K)$  den **Hilbertklassenkörper** von  $K$ .

# Hauptsatz der Klassenkörpertheorie

## Theorem

Sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper mit Idealklassengruppe  $Cl(K)$ . Dann existiert eine eindeutige Körpererweiterung  $H(K)/K$ , so dass:

- (i)  $H(K)$  ist die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung von  $K$ ;
- (ii)  $Cl(K) \cong Gal(H(K)/K)$ .

- Man nennt  $H(K)$  den **Hilbertklassenkörper** von  $K$ .
- Der Isomorphismus in (ii) wird vom **Artin Symbol** induziert.

# Das Kapitulationsproblem und sein Historischer Hintergrund

# Das Kapitulationsproblem und sein Historischer Hintergrund

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper.

# Das Kapitulationsproblem und sein Historischer Hintergrund

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper.

- Dann definieren wir den **Lift** von Idealen von  $K$  zu  $L$  wie folgt:

$$\iota_{L/K} : \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}_L, I \mapsto I \cdot \mathcal{O}_L$$

# Das Kapitulationsproblem und sein Historischer Hintergrund

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper.

- Dann definieren wir den **Lift** von Idealen von  $K$  zu  $L$  wie folgt:

$$\iota_{L/K} : \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}_L, I \mapsto I \cdot \mathcal{O}_L$$

- Dies ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus, der kanonisch den Lift von Idealklassen induziert:

$$\bar{\iota}_{L/K} : Cl(K) \rightarrow Cl(L), [I] \mapsto [I \cdot \mathcal{O}_L],$$

wobei  $I$  ein Ideal in  $K$  ist und  $[I]$  die von  $I$  erzeugte Idealklasse.



# Das Kapitulationsproblem und sein Historischer Hintergrund

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper.

- Dann definieren wir den **Lift** von Idealen von  $K$  zu  $L$  wie folgt:

$$\iota_{L/K} : \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}_L, I \mapsto I \cdot \mathcal{O}_L$$

- Dies ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus, der kanonisch den Lift von Idealklassen induziert:

$$\bar{\iota}_{L/K} : Cl(K) \rightarrow Cl(L), [I] \mapsto [I \cdot \mathcal{O}_L],$$

wobei  $I$  ein Ideal in  $K$  ist und  $[I]$  die von  $I$  erzeugte Idealklasse.

- $\bar{\iota}_{L/K}$  ist i.A. nicht mehr injektiv, d.h. es existieren Ideale in  $K$ , die in  $L$  nicht Hauptideal sind, aber beim Liften zu  $L$  zu Hauptidealen werden.

## Definition

Man sagt, dass solche Ideale wie oben in  $L/K$  **kapitulieren**. Entsprechend definieren wir den **Kapitulationskern** von  $L/K$  als

$$P_K(L) = \ker(\bar{i}_{L/K} : Cl(K) \rightarrow Cl(L)).$$

## Definition

Man sagt, dass solche Ideale wie oben in  $L/K$  **kapitulieren**. Entsprechend definieren wir den **Kapitulationskern** von  $L/K$  als

$$P_K(L) = \ker(\bar{\iota}_{L/K} : Cl(K) \rightarrow Cl(L)).$$

## Theorem (Hilbert 94, 1897)

*Sei  $L/K$  eine zyklische unverzweigte Erweiterung mit Galoisgruppe  $G$ . Dann gilt*

$$|P_K(L)| = [L : K] \cdot |\mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*)|,$$

*wobei  $\mathcal{O}_L^*$  die Einheitengruppe vom Ganzheitsring von  $L$  ist und  $\mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*) = \mathcal{O}_K^* / N_{L/K}(\mathcal{O}_L^*)$  die 0-te Kohomologiegruppe von  $(G, \mathcal{O}_L^*)$  ist.*

## Definition

Man sagt, dass solche Ideale wie oben in  $L/K$  **kapitulieren**. Entsprechend definieren wir den **Kapitulationskern** von  $L/K$  als

$$P_K(L) = \ker(\bar{\iota}_{L/K} : Cl(K) \rightarrow Cl(L)).$$

## Theorem (Hilbert 94, 1897)

*Sei  $L/K$  eine zyklische unverzweigte Erweiterung mit Galoisgruppe  $G$ . Dann gilt*

$$|P_K(L)| = [L : K] \cdot |\mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*)|,$$

*wobei  $\mathcal{O}_L^*$  die Einheitengruppe vom Ganzheitsring von  $L$  ist und  $\mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*) = \mathcal{O}_K^* / N_{L/K}(\mathcal{O}_L^*)$  die 0-te Kohomologiegruppe von  $(G, \mathcal{O}_L^*)$  ist.*

## Beispiel

*Falls  $K$  imaginär quadratisch und  $[L : K] = p^n$ ,  $p > 2$ , dann:*  
 $|P_K(L)| = [L : K].$

## Theorem (Suzuki, 1991)

*Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann gilt:*

$$[L : K] \text{ teilt } |P_K(L)|.$$

## Theorem (Suzuki, 1991)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann gilt:

$$[L : K] \text{ teilt } |P_K(L)|.$$

- Als Spezialfall hatte Furtwängler 1932 den **Hauptidealsatz** bewiesen:  
Alle Ideale in  $K$  werden in  $H(K)$  zu Hauptidealen.

## Theorem (Suzuki, 1991)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann gilt:

$$[L : K] \text{ teilt } |P_K(L)|.$$

- Als Spezialfall hatte Furtwängler 1932 den **Hauptidealsatz** bewiesen: Alle Ideale in  $K$  werden in  $H(K)$  zu Hauptidealen.
- Entscheidender Baustein für den Satz von Suzuki ist die sogenannte **Verlagerungstheorie**:

## Theorem (Artin, 1930)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Cl(L) & \longrightarrow & Gal(H(L)/L) \\ \uparrow \wr_{L/K} & & \uparrow Ver_{L/K} \\ Cl(K) & \longrightarrow & Gal(H(K)/K) \end{array}$$



## Theorem (Artin, 1930)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Cl(L) & \longrightarrow & Gal(H(L)/L) \\ \uparrow \iota_{L/K} & & \uparrow \text{Ver}_{L/K} \\ Cl(K) & \longrightarrow & Gal(H(K)/K) \end{array}$$

- Die horizontalen Abbildungen sind durch die Artinsymbole von  $H(K)/K$ , bzw.  $H(L)/L$  induziert.

## Theorem (Artin, 1930)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Cl(L) & \longrightarrow & Gal(H(L)/L) \\ \uparrow \wr_{L/K} & & \uparrow Ver_{L/K} \\ Cl(K) & \longrightarrow & Gal(H(K)/K) \end{array}$$

- Die horizontalen Abbildungen sind durch die Artinsymbole von  $H(K)/K$ , bzw.  $H(L)/L$  induziert.
- $Ver_{L/K}$  ist die sogenannte Gruppenverlagerung von  $L/K$ .

## Theorem (Artin, 1930)

Sei  $L/K$  eine unverzweigte abelsche Erweiterung. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Cl(L) & \longrightarrow & Gal(H(L)/L) \\ \uparrow \wr_{L/K} & & \uparrow Ver_{L/K} \\ Cl(K) & \longrightarrow & Gal(H(K)/K) \end{array}$$

- Die horizontalen Abbildungen sind durch die Artinsymbole von  $H(K)/K$ , bzw.  $H(L)/L$  induziert.
- $Ver_{L/K}$  ist die sogenannte Gruppenverlagerung von  $L/K$ .
- Durch den Satz von Artin wird das Kapitulationsproblem auf ein rein gruppentheoretisches Problem zurückgeführt.

# Interessante Fragen

# Interessante Fragen

- Was ist die genaue Ordnung des Kapitulationskerns?

# Interessante Fragen

- Was ist die genaue Ordnung des Kapitulationskerns?
- Suzukis Theorem macht keine Aussage über die Struktur des Kapitulationskerns. Unter welchen Umständen können wir z.B.  $\text{Gal}(L/K)$  in den Kapitulationskern einbetten?

# Interessante Fragen

- Was ist die genaue Ordnung des Kapitulationskerns?
- Suzukis Theorem macht keine Aussage über die Struktur des Kapitulationskerns. Unter welchen Umständen können wir z.B.  $\text{Gal}(L/K)$  in den Kapitulationskern einbetten?
- Sei  $K$  ein Zahlkörper mit beispielsweise  $\text{Cl}(K) \cong C_p \times C_p$ . Dann existieren  $p + 1$  unverzweigte zyklische Erweiterungen  $L_1, \dots, L_{p+1}$  vom Grad  $p$  über  $K$ . Sind die Kapitulationskerne  $P_K(L_i)$  irgendwie korreliert?

# Einschränkung auf $p$ -Teile



# Einschränkung auf $p$ -Teile

## Theorem

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\iota_{L/K}(a)) = a^{[L:K]}, \quad \forall a \in Cl(K).$$

# Einschränkung auf $p$ -Teile

## Theorem

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\iota_{L/K}(a)) = a^{[L:K]}, \quad \forall a \in Cl(K).$$

- Falls  $([L : K], \text{ord}(a)) = 1$ , dann  $\text{ord}(a) = \text{ord}(\iota_{L/K}(a))$ .

# Einschränkung auf $p$ -Teile

## Theorem

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\iota_{L/K}(a)) = a^{[L:K]}, \quad \forall a \in Cl(K).$$

- Falls  $([L:K], \text{ord}(a)) = 1$ , dann  $\text{ord}(a) = \text{ord}(\iota_{L/K}(a))$ .
- Können uns auf den  $p$ -Teil der Klassengruppe von  $K$  und auf unverzweigte abelsche Grad- $p$ -Erweiterungen beschränken.

# Einschränkung auf $p$ -Teile

## Theorem

Sei  $L/K$  eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\iota_{L/K}(a)) = a^{[L:K]}, \quad \forall a \in Cl(K).$$

- Falls  $([L:K], \text{ord}(a)) = 1$ , dann  $\text{ord}(a) = \text{ord}(\iota_{L/K}(a))$ .
- Können uns auf den  $p$ -Teil der Klassengruppe von  $K$  und auf unverzweigte abelsche Grad- $p$ -Erweiterungen beschränken.
- Im folgenden sei  $A(K) = Cl(K)_p$  und  $H(K) = H(K)_p$  für eine feste Primzahl  $p$ .

# Chevalleys Theorem

# Chevalleys Theorem

## Theorem (Furtwängler, Chevalley)

*Sei  $L/K$  eine zyklische Erweiterung, in der höchstens ein Primideal verzweigt. Sei  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt von  $\sigma \in G$ ,  $s = \sigma - 1$ . Dann gilt*

$$\text{Ker} N_{L/K} = A(L)^s, \quad (1)$$

*und damit:  $\text{rk}(A(L)) \leq [L : K] \cdot \text{rk}(A(K))$ .*

# Chevalleys Theorem

## Theorem (Furtwängler, Chevalley)

Sei  $L/K$  eine zyklische Erweiterung, in der höchstens ein Primideal verzweigt. Sei  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt von  $\sigma \in G$ ,  $s = \sigma - 1$ . Dann gilt

$$\text{Ker} N_{L/K} = A(L)^s, \quad (1)$$

und damit:  $\text{rk}(A(L)) \leq [L : K] \cdot \text{rk}(A(K))$ .

- Haben u.a. erstmals gezeigt, dass  $A(L)^G / \iota_{L/K}(A(K)) \cong \mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*)$ , falls  $L/K$  unverzweigt ist.

# Chevalleys Theorem

## Theorem (Furtwängler, Chevalley)

Sei  $L/K$  eine zyklische Erweiterung, in der höchstens ein Primideal verzweigt. Sei  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt von  $\sigma \in G$ ,  $s = \sigma - 1$ . Dann gilt

$$\text{Ker} N_{L/K} = A(L)^s, \quad (1)$$

und damit:  $\text{rk}(A(L)) \leq [L : K] \cdot \text{rk}(A(K))$ .

- Haben u.a. erstmals gezeigt, dass  $A(L)^G / \iota_{L/K}(A(K)) \cong \mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*)$ , falls  $L/K$  unverzweigt ist.
- Dies hat zu einem besonders kurzen und modernen Beweis von Chevalleys Theorem geführt.



# Chevalleys Theorem

## Theorem (Furtwängler, Chevalley)

Sei  $L/K$  eine zyklische Erweiterung, in der höchstens ein Primideal verzweigt. Sei  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt von  $\sigma \in G$ ,  $s = \sigma - 1$ . Dann gilt

$$\text{Ker} N_{L/K} = A(L)^s, \quad (1)$$

und damit:  $\text{rk}(A(L)) \leq [L : K] \cdot \text{rk}(A(K))$ .

- Haben u.a. erstmals gezeigt, dass  $A(L)^G / \iota_{L/K}(A(K)) \cong \mathcal{H}^0(G, \mathcal{O}_L^*)$ , falls  $L/K$  unverzweigt ist.
- Dies hat zu einem besonders kurzen und modernen Beweis von Chevalleys Theorem geführt.
- Wir sagen: Erweiterungen, die (1) erfüllen, besitzen die Furtwängler-Eigenschaft, kurz  $F$ -Eigenschaft.

## Theorem

Sei  $L/K$  wie oben und vom Grad  $p$ . Dann existiert ein System  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in  $A(L)$  mit  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklen  $B_i = b_i^{\mathbb{Z}[s]}$ , so dass

$$\text{Ker} N_{L/K} = B_1^s \times \dots \times B_n^s. \quad (2)$$

## Theorem

Sei  $L/K$  wie oben und vom Grad  $p$ . Dann existiert ein System  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in  $A(L)$  mit  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklen  $B_i = b_i^{\mathbb{Z}[s]}$ , so dass

$$\text{Ker} N_{L/K} = B_1^s \times \dots \times B_n^s. \quad (2)$$

## Definition

Ein  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklus  $B_i$  wie oben heißt **exakt**, falls  $B_i \cap A(L)^s = B_i^s$  und **nicht exakt** andernfalls.

## Theorem

Sei  $L/K$  wie oben und vom Grad  $p$ . Dann existiert ein System  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in  $A(L)$  mit  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklen  $B_i = b_i^{\mathbb{Z}[s]}$ , so dass

$$\text{Ker} N_{L/K} = B_1^s \times \dots \times B_n^s. \quad (2)$$

## Definition

Ein  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklus  $B_i$  wie oben heißt **exakt**, falls  $B_i \cap A(L)^s = B_i^s$  und **nicht exakt** andernfalls.

- In nicht-exakten Zyklen gibt es keine Kapitulation:

## Theorem

Sei  $L/K$  wie oben und vom Grad  $p$ . Dann existiert ein System  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in  $A(L)$  mit  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklen  $B_i = b_i^{\mathbb{Z}[s]}$ , so dass

$$\text{Ker} N_{L/K} = B_1^s \times \dots \times B_n^s. \quad (2)$$

## Definition

Ein  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklus  $B_i$  wie oben heißt **exakt**, falls  $B_i \cap A(L)^s = B_i^s$  und **nicht exakt** andernfalls.

- In nicht-exakten Zyklen gibt es keine Kapitulation:

## Theorem

Sei  $L/K$  wie oben und vom Grad  $p$ . Dann existiert ein System  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in  $A(L)$  mit  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklen  $B_i = b_i^{\mathbb{Z}[s]}$ , so dass

$$\text{Ker} N_{L/K} = B_1^s \times \dots \times B_n^s. \quad (2)$$

## Definition

Ein  $\mathbb{Z}[s]$ -Zyklus  $B_i$  wie oben heißt **exakt**, falls  $B_i \cap A(L)^s = B_i^s$  und **nicht exakt** andernfalls.

- In nicht-exakten Zyklen gibt es keine Kapitulation:

## Theorem

Sei  $b \in A(L)$  mit  $N_{L/K}(b) = a \in A(K)$  und  $B = b^{\mathbb{Z}[s]}$ . Falls  $B$  nicht exakt ist, folgt:  $\text{ord}(a) = \text{ord}(\iota_{L/K}(a))$ .

# Wachstum von Idealklassen

# Wachstum von Idealklassen

## Definition

Sei  $L/K$  wie oben,  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt durch ein  $\sigma \in G$  und  $s = \sigma - 1$ . Wir definieren  $A(K)' = N_{L/K}(A(L))$ . Dann sagen wir  $L/K$  hat:



# Wachstum von Idealklassen

## Definition

Sei  $L/K$  wie oben,  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt durch ein  $\sigma \in G$  und  $s = \sigma - 1$ . Wir definieren  $A(K)' = N_{L/K}(A(L))$ . Dann sagen wir  $L/K$  hat:

(a) **stabiles Wachstum**, falls  $\text{rk}(A(K)') = \text{rk}(A(L))$  und  $\text{rk}(A(K)) = \text{rk}(A(K)^p)$ ;

# Wachstum von Idealklassen

## Definition

Sei  $L/K$  wie oben,  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt durch ein  $\sigma \in G$  und  $s = \sigma - 1$ . Wir definieren  $A(K)' = N_{L/K}(A(L))$ . Dann sagen wir  $L/K$  hat:

- (a) **stabiles Wachstum**, falls  $\text{rk}(A(K)') = \text{rk}(A(L))$  und  $\text{rk}(A(K)) = \text{rk}(A(K)^p)$ ;
- (b) **zahmes Wachstum**, falls ...

# Wachstum von Idealklassen

## Definition

Sei  $L/K$  wie oben,  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt durch ein  $\sigma \in G$  und  $s = \sigma - 1$ . Wir definieren  $A(K)' = N_{L/K}(A(L))$ . Dann sagen wir  $L/K$  hat:

- (a) **stabiles Wachstum**, falls  $\text{rk}(A(K)') = \text{rk}(A(L))$  und  $\text{rk}(A(K)) = \text{rk}(A(K)^p)$ ;
- (b) **zahmes Wachstum**, falls ...
- (c) **semi-stabiles Wachstum**, falls  $A(L)^{s^{p-1}} = \{1\}$ ;

# Wachstum von Idealklassen

## Definition

Sei  $L/K$  wie oben,  $G = \text{Gal}(L/K)$  erzeugt durch ein  $\sigma \in G$  und  $s = \sigma - 1$ . Wir definieren  $A(K)' = N_{L/K}(A(L))$ . Dann sagen wir  $L/K$  hat:

- (a) **stabiles Wachstum**, falls  $\text{rk}(A(K)') = \text{rk}(A(L))$  und  $\text{rk}(A(K)) = \text{rk}(A(K)^p)$ ;
- (b) **zahmes Wachstum**, falls ...
- (c) **semi-stabiles Wachstum**, falls  $A(L)^{s^{p-1}} = \{1\}$ ;
- (d) **wildes Wachstum**, sonst.



- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.

- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.
- In den Fällen (a)-(c) gilt:  $\exp(\text{Ker}N_{L/K}) \leq p$ .

- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.
- In den Fällen (a)-(c) gilt:  $\exp(\text{Ker}N_{L/K}) \leq p$ .
- Wildes Wachstum: Haben explizit Familien von Erweiterungen konstruiert, in denen  $\exp(\text{Ker}N_{L/K})$  beliebig groß ist.



- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.
- In den Fällen (a)-(c) gilt:  $\exp(\text{Ker}N_{L/K}) \leq p$ .
- Wildes Wachstum: Haben explizit Familien von Erweiterungen konstruiert, in denen  $\exp(\text{Ker}N_{L/K})$  beliebig groß ist.

- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.
- In den Fällen (a)-(c) gilt:  $\exp(\text{Ker}N_{L/K}) \leq p$ .
- Wildes Wachstum: Haben explizit Familien von Erweiterungen konstruiert, in denen  $\exp(\text{Ker}N_{L/K})$  beliebig groß ist.

## Theorem

*In der Situation wie oben sei  $b \in A(L)$  mit  $N_{L/K}(b) = a$ . Falls  $a$  zu einem minimalen Erzeugendensystem von  $A(K)'$  verlängerbar ist, dann gilt in den Fällen (a)-(c):*

$$\text{ord}(b) = p \cdot \text{ord}(\iota_{L/K}(N_{L/K}(b))). \quad (3)$$

- MAGMA: Alle vier Typen von Wachstum treten auf.
- In den Fällen (a)-(c) gilt:  $\exp(\text{Ker}N_{L/K}) \leq p$ .
- Wildes Wachstum: Haben explizit Familien von Erweiterungen konstruiert, in denen  $\exp(\text{Ker}N_{L/K})$  beliebig groß ist.

## Theorem

*In der Situation wie oben sei  $b \in A(L)$  mit  $N_{L/K}(b) = a$ . Falls  $a$  zu einem minimalen Erzeugendensystem von  $A(K)'$  verlängerbar ist, dann gilt in den Fällen (a)-(c):*

$$\text{ord}(b) = p \cdot \text{ord}(\iota_{L/K}(N_{L/K}(b))). \quad (3)$$

- Es folgt in diesem Fall, dass  $a$  genau dann in  $L$  kapituliert, falls  $\text{ord}(b) = \text{ord}(a)$ .

# Struktur des Kapitulationskerns

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

*Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:*

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
- Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
- Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.
- $P_K(L) = \langle a_1, a_2^3 \rangle \cong C_3 \times C_3$



# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
- Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.
- $P_K(L) = \langle a_1, a_2^3 \rangle \cong C_3 \times C_3$

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
  - Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.
  - $P_K(L) = \langle a_1, a_2^3 \rangle \cong C_3 \times C_3$
- 
- Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Galoisgruppe i.A. nicht in den Kapitulationskern einbetten lässt.

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
  - Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.
  - $P_K(L) = \langle a_1, a_2^3 \rangle \cong C_3 \times C_3$
- 
- Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Galoisgruppe i.A. nicht in den Kapitulationskern einbetten lässt.
  - Mit Hilfe von Galois Kohomologie haben wir u.a. hinreichende Bedingungen gegeben, unter denen dies möglich ist. Diese sind allerdings recht technisch und schwer zu verifizieren.

# Struktur des Kapitulationskerns

## Beispiel

Sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  mit  $\alpha^2 = 3299$ . Dann liefert MAGMA:

- $A(K) = \langle a_1, a_2 \rangle \cong C_3 \times C_9$
- Sei  $L = H(K)^{\langle a_1 \rangle}$ . Dann ist  $L/K$  zyklisch vom Grad 9.
- $P_K(L) = \langle a_1, a_2^3 \rangle \cong C_3 \times C_3$

- Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Galoisgruppe i.A. nicht in den Kapitulationskern einbetten lässt.
- Mit Hilfe von Galois Kohomologie haben wir u.a. hinreichende Bedingungen gegeben, unter denen dies möglich ist. Diese sind allerdings recht technisch und schwer zu verifizieren.
- Um mehr über die Struktur des Kapitulationskerns zu erfahren, nehmen wir im folgenden eine zusätzliche  $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe von  $K$  an:

# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

Sei  $K/k$  eine abelsche Galoiserweiterung mit Galois Gruppe  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $p \nmid |G|$ .

# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

Sei  $K/k$  eine abelsche Galoiserweiterung mit Galois Gruppe  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $p \nmid |G|$ .

- Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}_p[G]$  eine Idempotente.

# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

Sei  $K/k$  eine abelsche Galoiserweiterung mit Galois Gruppe  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $p \nmid |G|$ .

- Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}_p[G]$  eine Idempotente.
- Dies liefert eine Zerlegung von  $\mathbb{Z}_p[G]$ :

$$\mathbb{Z}_p[G] = \alpha \mathbb{Z}_p[G] \oplus (1 - \alpha) \mathbb{Z}_p[G].$$



# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

Sei  $K/k$  eine abelsche Galoiserweiterung mit Galois Gruppe  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $p \nmid |G|$ .

- Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}_p[G]$  eine Idempotente.
- Dies liefert eine Zerlegung von  $\mathbb{Z}_p[G]$ :

$$\mathbb{Z}_p[G] = \alpha \mathbb{Z}_p[G] \oplus (1 - \alpha) \mathbb{Z}_p[G].$$

- Und eine Zerlegung von  $A(K)$ :

$$A(K) = A(K)_\alpha \times A(K)_{1-\alpha}, \text{ wobei}$$

$$A(K)_\alpha = A(K)^\alpha = \{a^\alpha \mid a \in A(K)\}$$

# $G$ -Wirkung auf der Idealklassengruppe

Sei  $K/k$  eine abelsche Galoiserweiterung mit Galois Gruppe  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $p \nmid |G|$ .

- Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}_p[G]$  eine Idempotente.
- Dies liefert eine Zerlegung von  $\mathbb{Z}_p[G]$ :

$$\mathbb{Z}_p[G] = \alpha \mathbb{Z}_p[G] \oplus (1 - \alpha) \mathbb{Z}_p[G].$$

- Und eine Zerlegung von  $A(K)$ :

$$A(K) = A(K)_\alpha \times A(K)_{1-\alpha}, \text{ wobei}$$

$$A(K)_\alpha = A(K)^\alpha = \{a^\alpha \mid a \in A(K)\}$$

- Wir nennen  $A(K)_\alpha$  eine irreduzible Komponente von  $A(K)$ , falls  $\alpha$  primitiv ist.

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Korollar

*Sei  $B$  ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklus in einer irreduziblen Komponente  $A(K)_\alpha$ . Dann:*

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Korollar

*Sei  $B$  ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklus in einer irreduziblen Komponente  $A(K)_\alpha$ . Dann:*

- $\mathbb{Z}_p[G]$  wirkt transitiv auf Elemente in  $B$  von gleicher Ordnung.*

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Korollar

*Sei  $B$  ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklus in einer irreduziblen Komponente  $A(K)_\alpha$ . Dann:*

- $\mathbb{Z}_p[G]$  wirkt transitiv auf Elemente in  $B$  von gleicher Ordnung.
- Sei  $L \supset K \supset k$ ,  $L/k$  Galois,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann kapituliert entweder jede Idealklasse  $a \in B$  mit  $\text{ord}(a) = p^n$  in  $L$  oder keine.

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Korollar

*Sei  $B$  ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklus in einer irreduziblen Komponente  $A(K)_\alpha$ . Dann:*

- $\mathbb{Z}_p[G]$  wirkt transitiv auf Elemente in  $B$  von gleicher Ordnung.
- Sei  $L \supset K \supset k$ ,  $L/k$  Galois,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann kapituliert entweder jede Idealklasse  $a \in B$  mit  $\text{ord}(a) = p^n$  in  $L$  oder keine.
- Unter gewissen Voraussetzungen kapitulieren alle  $a \in A(K)$  mit  $\text{ord}(a) \leq p^n$  in einer Teilerweiterung von  $H(K)/K$  vom Exponent  $p^n$ .

## Theorem

*Sei  $K/k$  wie oben. Dann kann  $A(K)$  in ein direktes Produkt von zyklischen  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Untermoduln ( $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklen) zerlegt werden.*

## Korollar

*Sei  $B$  ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Zyklus in einer irreduziblen Komponente  $A(K)_\alpha$ . Dann:*

- $\mathbb{Z}_p[G]$  wirkt transitiv auf Elemente in  $B$  von gleicher Ordnung.
- Sei  $L \supset K \supset k$ ,  $L/k$  Galois,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann kapituliert entweder jede Idealklasse  $a \in B$  mit  $\text{ord}(a) = p^n$  in  $L$  oder keine.
- Unter gewissen Voraussetzungen kapitulieren alle  $a \in A(K)$  mit  $\text{ord}(a) \leq p^n$  in einer Teilerweiterung von  $H(K)/K$  vom Exponent  $p^n$ .
- $KH(k)$  ist gerade der Genuskörper von  $K/k$ .



# Kapitulation in Imaginär Quadratischen Körpern

Nr.	Discriminant	$(P_K(L_1), \dots, P_K(L_6))$
1	-12451	(3,6,4,1,5,2)
2	-17944	(2,1,5,4,6,3)
3	-30263	(6,5,3,4,2,1)
4	-33531	(3,2,4,6,1,5)
5	-37363	(1,2,3,4,6,5)
6	-38047	(3,1,6,4,2,5)
7	-39947	(5,1,4,6,2,3)
8	-42871	(2,1,6,5,4,3)
9	-53079	(2,6,4,1,5,3)
10	-54211	(2,6,3,4,1,5)
11	-58424	(3,2,1,5,4,6)
12	-61556	(6,5,4,1,3,2)

13	-62632	(2,6,6,6,6,6)
14	-63411	(5,2,6,4,1,3)
15	-64103	(1,3,6,5,2,4)
16	-65784	(3,6,4,5,2,1)
17	-66328	(6,2,4,3,5,1)
18	-67031	(4,4,4,1,4,4)
19	-67063	(1,1,1,6,1,1)
20	-67128	(3,2,4,6,1,5)
21	-69811	(3,1,4,2,5,6)
22	-72084	(3,1,5,6,4,2)
23	-74051	(2,1,3,6,5,4)
24	-75688	(5,6,5,5,5,5)
25	-81287	(4,1,3,5,2,6)
26	-83767	(5,4,3,2,1,6)
27	-84271	(5,4,2,1,6,3)
28	-85099	(6,2,1,4,3,5)

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

$$(A1) \exp(\text{Ker}N_{L_j/K}) = p, \forall j;$$

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

$$(A1) \exp(\text{Ker}N_{L_j/K}) = p, \forall j;$$

$$(A2) \text{rk}(\text{Ker}N_{L_1/K}) = 2.$$

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

$$(A1) \exp(\text{Ker}N_{L_j/K}) = p, \forall j;$$

$$(A2) \text{rk}(\text{Ker}N_{L_1/K}) = 2.$$

Dann: (i)  $P_K(L_i) \neq P_K(L_j)$ ,  $\forall i \neq j \Leftrightarrow \text{rk}(\text{Ker}N_{L_u/K}) = 2$ ,  $\forall u$ .

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

$$(A1) \exp(\text{Ker}N_{L_j/K}) = p, \forall j;$$

$$(A2) \text{rk}(\text{Ker}N_{L_1/K}) = 2.$$

Dann: (i)  $P_K(L_i) \neq P_K(L_j)$ ,  $\forall i \neq j \Leftrightarrow \text{rk}(\text{Ker}N_{L_u/K}) = 2$ ,  $\forall u$ .

(ii)  $P_K(L_i) = P_K(L_j)$ ,  $\forall 1 \leq i \neq j \leq p$ , andernfalls.

## Theorem

Sei  $K$  ein imaginär quadratischer Körper mit  $\text{rk}(A(K)) = 2$ ,  $p > 3$ . Seien  $L_1, \dots, L_{p+1}$  die Zwischenkörper von  $H(K)/K$  vom Grad  $p$  über  $K$ , so dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_i/K}) \leq \text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K})$ ,  $\forall i < j$ . Wir nehmen an:

$$(A1) \exp(\text{Ker}N_{L_j/K}) = p, \forall j;$$

$$(A2) \text{rk}(\text{Ker}N_{L_1/K}) = 2.$$

Dann: (i)  $P_K(L_i) \neq P_K(L_j)$ ,  $\forall i \neq j \Leftrightarrow \text{rk}(\text{Ker}N_{L_u/K}) = 2$ ,  $\forall u$ .

(ii)  $P_K(L_i) = P_K(L_j)$ ,  $\forall 1 \leq i \neq j \leq p$ , andernfalls.

- Im ersten Fall sagen wir  $K$  hat **1-1-Kapitulation** und im zweiten Fall sagen wir  $K$  hat  **$p$ -Kapitulation**.



- Wir haben gezeigt, dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K}) > 0$  gerade ist für alle  $j$ .

- Wir haben gezeigt, dass  $\text{rk}(\text{Ker} N_{L_j/K}) > 0$  gerade ist für alle  $j$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Annahmen (A1) und (A2) erfüllt sind, sollte für wachsendes  $p$  gegen 1 gehen.

- Wir haben gezeigt, dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K}) > 0$  gerade ist für alle  $j$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Annahmen (A1) und (A2) erfüllt sind, sollte für wachsendes  $p$  gegen 1 gehen.
- Um dies zu untermauern, haben wir eine Heuristik über die Klassengruppe von unverzweigten zyklischen Erweiterungen von imaginär quadratischen Zahlkörpern entwickelt.

- Wir haben gezeigt, dass  $\text{rk}(\text{Ker}N_{L_j/K}) > 0$  gerade ist für alle  $j$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Annahmen (A1) und (A2) erfüllt sind, sollte für wachsendes  $p$  gegen 1 gehen.
- Um dies zu untermauern, haben wir eine Heuristik über die Klassengruppe von unverzweigten zyklischen Erweiterungen von imaginär quadratischen Zahlkörpern entwickelt.
- Das obige Theorem lässt sich in gewisser Weise für  $\text{rk}(A(K)) > 2$  verallgemeinern.

# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

Sei  $L/K$  unverweigte zyklische Erweiterung vom Grad  $p$ ,  $K$  imaginär quadratisch. Der Einfachheit wegen sei  $rk(A(K)) = 2$ .

# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

Sei  $L/K$  unverweigte zyklische Erweiterung vom Grad  $p$ ,  $K$  imaginär quadratisch. Der Einfachheit wegen sei  $rk(A(K)) = 2$ .

- Frage: Wie häufig tritt der Fall  $rk(Ker N_{L/K}) = 2k$  auf, wenn  $K$  die imagin. quadr. Körper mit  $rk(A(K)) = 2$  durchläuft?

# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

Sei  $L/K$  unverweigte zyklische Erweiterung vom Grad  $p$ ,  $K$  imaginär quadratisch. Der Einfachheit wegen sei  $rk(A(K)) = 2$ .

- Frage: Wie häufig tritt der Fall  $rk(Ker N_{L/K}) = 2k$  auf, wenn  $K$  die imagin. quadr. Körper mit  $rk(A(K)) = 2$  durchläuft?
- Heuristik stützt sich auf Ideen von Cohen-Lenstra unter Berücksichtigung der entwickelten Resultate ( $Ker N_{L/K}$  hat geraden Rang und ist nach Chevalley  $\mathbb{Z}[s]$ -zyklisch).



# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

Sei  $L/K$  unverweigte zyklische Erweiterung vom Grad  $p$ ,  $K$  imaginär quadratisch. Der Einfachheit wegen sei  $rk(A(K)) = 2$ .

- Frage: Wie häufig tritt der Fall  $rk(Ker N_{L/K}) = 2k$  auf, wenn  $K$  die imagin. quadr. Körper mit  $rk(A(K)) = 2$  durchläuft?
- Heuristik stützt sich auf Ideen von Cohen-Lenstra unter Berücksichtigung der entwickelten Resultate ( $Ker N_{L/K}$  hat geraden Rang und ist nach Chevalley  $\mathbb{Z}[s]$ -zyklisch).
- Da wir nur an  $Ker N_{L/K}$  interessiert sind, ist nur der Rang von  $A(K)$  entscheidend und nicht etwa der Exponent.

# Heuristiken über die Klassengruppe von Unverzweigten Zyklischen Erweiterungen von Imaginär Quadratischen Zahlkörpern

Sei  $L/K$  unverweigte zyklische Erweiterung vom Grad  $p$ ,  $K$  imaginär quadratisch. Der Einfachheit wegen sei  $rk(A(K)) = 2$ .

- Frage: Wie häufig tritt der Fall  $rk(Ker N_{L/K}) = 2k$  auf, wenn  $K$  die imagin. quadr. Körper mit  $rk(A(K)) = 2$  durchläuft?
- Heuristik stützt sich auf Ideen von Cohen-Lenstra unter Berücksichtigung der entwickelten Resultate ( $Ker N_{L/K}$  hat geraden Rang und ist nach Chevalley  $\mathbb{Z}[s]$ -zyklisch).
- Da wir nur an  $Ker N_{L/K}$  interessiert sind, ist nur der Rang von  $A(K)$  entscheidend und nicht etwa der Exponent.
- Heuristik: Für  $p \rightarrow \infty$ , geht die rel. Häufigkeit für  $rk(Ker N_{L/K}) = 2$  gegen 1.

# Heuristik und Numerische Daten im Vergleich

# Heuristik und Numerische Daten im Vergleich

- Heuristik ist in guter Übereinstimmung mit den numerischen Daten:  
Im Fall  $p = 3$  haben wir 12484 solcher Erweiterungen  $L/K$  untersucht und mit MAGMA folgende relative Häufigkeiten (mittlere Spalte) ermittelt:

# Heuristik und Numerische Daten im Vergleich

- Heuristik ist in guter Übereinstimmung mit den numerischen Daten:  
Im Fall  $p = 3$  haben wir 12484 solcher Erweiterungen  $L/K$  untersucht und mit MAGMA folgende relative Häufigkeiten (mittlere Spalte) ermittelt:

# Heuristik und Numerische Daten im Vergleich

- Heuristik ist in guter Übereinstimmung mit den numerischen Daten:  
Im Fall  $p = 3$  haben wir 12484 solcher Erweiterungen  $L/K$  untersucht und mit MAGMA folgende relative Häufigkeiten (mittlere Spalte) ermittelt:

	$rk(Ker N_{L/K}) = 2k$	Heuristik
$k = 1$	0.8992	0.8889
$k = 2$	0.0950	0.0989
$k = 3$	0.0071	0.0110